ЛЕКЦИЯ 1
Глава 1
МЕТОД ПРОЕКЦИЙ. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

1.1. Метод проекций

Изображения, с которыми приходится встречаться в искусстве и технике, отличаются большим разнообразием, вследствие чего и требования, предъявляемые к ним, различные. В картинах и рисунках основным требованием является наглядность изображения. В технических изображениях главное требование – возможность получить по изображению точное представление о форме и размерах предмета.

В начертательной геометрии для решения геометрических задач используется графический способ, при котором геометрические свойства предметов изучаются непосредственно по чертежу. Для того чтобы чертеж соответствовал изображаемому предмету, он должен быть построен по определенным геометрическим законам. Правила построения изображений в начертательной геометрии основаны на *методе проекций*.

Метод проекций предполагает наличие плоскости проекций, объекта проецирования и проецирующих лучей.

Проекцией точки A на плоскость π_0 называется точка пересечения A^0 проецирующего луча p, проходящего в пространстве через точку A (рис. 1.1).

Различают два метода проецирования: центральное и параллельное.

1.2. Центральное и параллельное проецирование

При *центральном проецировании* все проецирующие лучи проходят через точку S, называемую центром проекций и не лежащую в плоскости проекций. Для построения проекций некоторых точек A, B, C, D (рис. 1.2) проводим через эти точки и центр проекций S проецирующие лучи до пересечения с плоскостью π_0. На плоскости проекций π_0 каждой точке будет соответствовать единственная точка – проекции A^0, B^0, C^0, D^0.

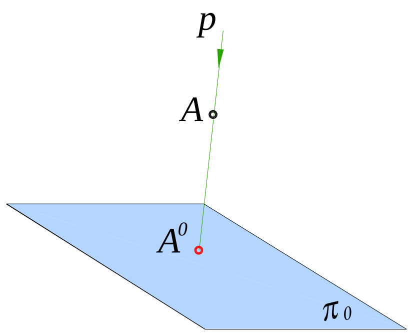


Рис. 1.1

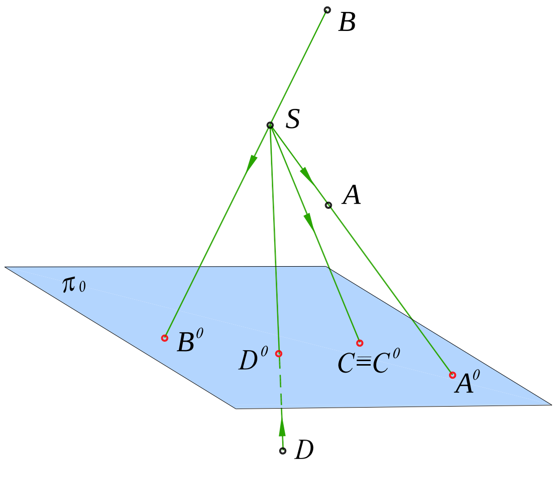


Рис. 1.2

Центральное проецирование обладает наглядностью, оно используется при построении изображений архитектурно-строительных объектов, но дает значительное искажение размеров, вследствие чего не применяется для выполнения чертежей.

При *параллельном* проецировании проецирующие лучи параллельны заданному направлению S (рис. 1.3). Точки пересечения проецирующих лучей, проходящих через точки A, B, C, с плоскостью проекций π_0 – параллельные проекции A^0, B^0, C^0 на плоскости π_0.

Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального при бесконечно удаленном центре проекций. В зависимости от направления проецирующих лучей относительно плоскости проекций параллельное проецирование может быть *прямоугольным* (проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций) и *косоугольным* (проецирующие лучи составляют с плоскостью проекций угол, не равный 90°).

Прямоугольной (ортогональной) проекцией точки A (рис. 1.4) является основание перпендикуляра A^0, проведенного из точки A на плоскость π_0. Ортогональное проецирование имеет ряд преимуществ перед центральным и косоугольным параллельным проецированием.

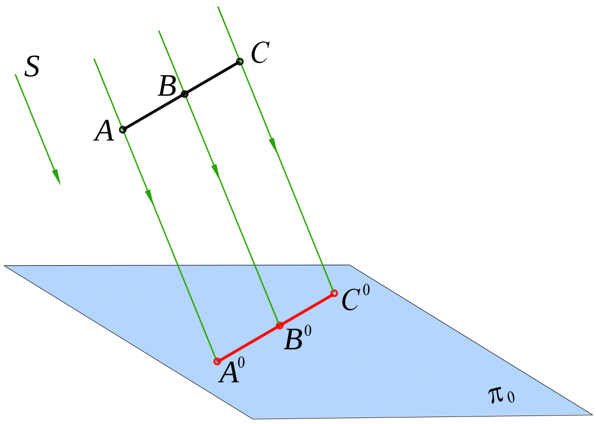


Рис. 1.3

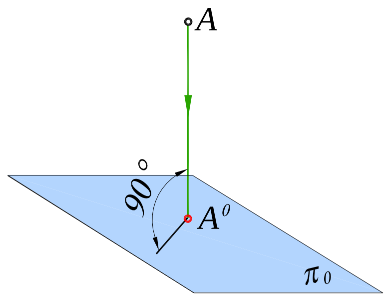


Рис. 1.4

К ним относятся простота геометрических построений и удобство измерений, поэтому прямоугольное (ортогональное) проецирование широко применяется для разработки чертежей. Прямоугольное проецирование включает в себя все свойства центрального и параллельного проецирования.

1.3. Свойства прямоугольного проецирования

1. Каждая точка и прямая в пространстве имеют единственную проекцию на плоскости, так как через любую точку в пространстве можно провести только один проецирующий луч (рис. 1.4).
2. Каждая точка на плоскости проекций может быть проекцией множества точек, если через них проходит общий проецирующий луч (рис. 1.5).
3. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой (рис. 1.6).

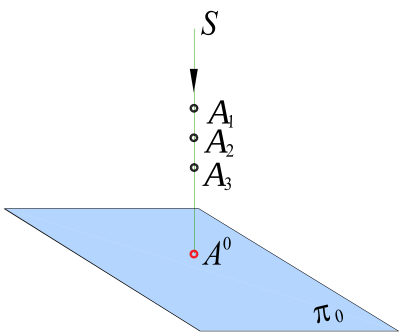


Рис. 1.5

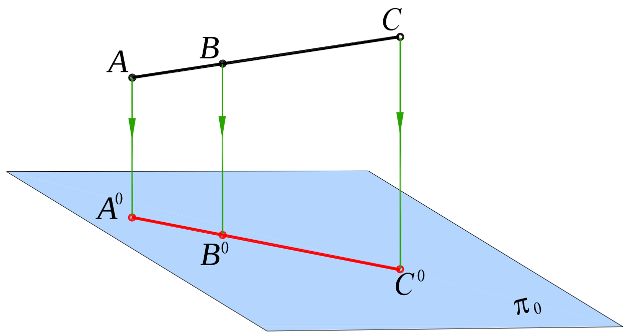


Рис. 1.6

4. Отношение отрезков прямой равно отношению их проекций (рис. 1.6):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A^0B^0}{B^0C^0}.$$

5. Проекции параллельных прямых параллельны. Если $AB \parallel CD$ то $A^0B^0 \parallel C^0D^0$ (рис. 1.7).
6. Отношение отрезков параллельных прямых равно отношению их проекций (рис. 1.7):

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A^0B^0}{C^0D^0}.$$

7. Если прямая перпендикулярна плоскости проекций, то проекцией этой прямой является точка (прямая *AB* рис. 1.8).
8. Если отрезок прямой параллелен плоскости проекций, то на эту плоскость отрезок спроецируется в натуральную величину (прямая *CD* рис. 1.8).

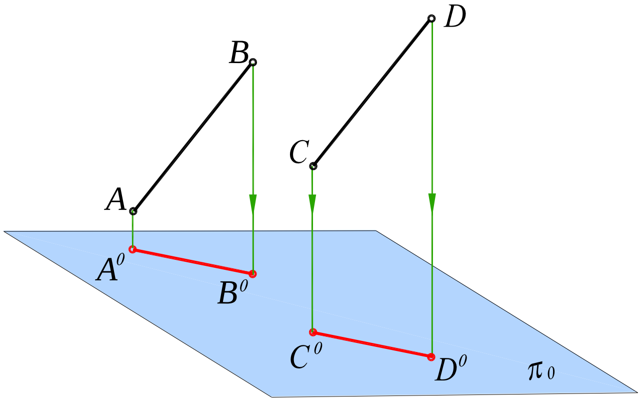


Рис. 1.7

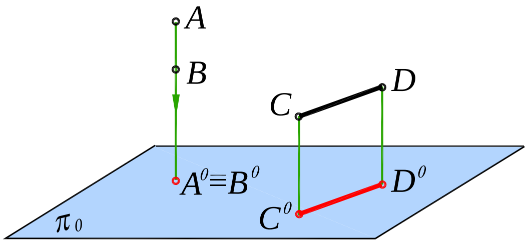


Рис. 1.8

1.4. Обратимость чертежа

Технический чертеж должен быть обратимым. *Обратимость чертежа* – это однозначное определение положения точки в пространстве по ее проекциям.

Если обратиться к чертежу на рис. 1.5, то нетрудно заметить, что точка A^0 может рассматриваться как проекция точек A_1, A_2, A_3, лежащих на одном проецирующем луче. Действительно, любая точка на плоскости π_0 является проекцией не единственной точки пространства, а целого множества точек, принадлежащих проецирующей прямой. Это значит, что одна проекция точки не определяет эту точку в пространстве. Поэтому для получения обратимого, т. е. метрически определенного чертежа, точку (или объект) проецируют на две или на три плоскости проекций, которые образуют в пространстве систему взаимно перпендикулярных плоскостей. Формой предмета с точки зрения его изображения является его поверхность, которую можно представить как геометрическое множество точек. Поэтому операция проецирования сводится к изображению множества точек предмета на плоскостях проекций.

1.5. Точка в системе двух и трех плоскостей проекций

Изучение способов построения проекций любых объектов начинают с изучения правил построения проекций точек. Возьмем в пространстве две взаимно перпендикулярные плоскости. Одна из них располагается горизонтально – ее называют *горизонтальной плоскостью проекций* и обозначают буквой π_1. Другая плоскость перпендикулярна горизонтальной и называется *фронтальной плоскостью проекций*. Эта плоскость обозначается буквой π_2 (рис. 1.9). Линия пересечения плоскостей проекций называется *осью проекций*. Ось проекций *x* разделяет каждую из плоскостей на две полуплоскости. Четыре двугранных угла I, II, III, IV, образованных при пересечении плоскостей, называются четвертями или квадрантами пространства.

Спроецируем точку *A*, расположенную в I четверти, на плоскости проекций π_1 и π_2. *Горизонтальной проекцией точки* называют прямоугольную проекцию точки на горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки *A*, с плоскостью π_1 . Обозначим ее символом A'. Проведем из точки A' в плоскости π_1 перпендикуляр на ось Ox и отметим вспомогательную точку A_x.

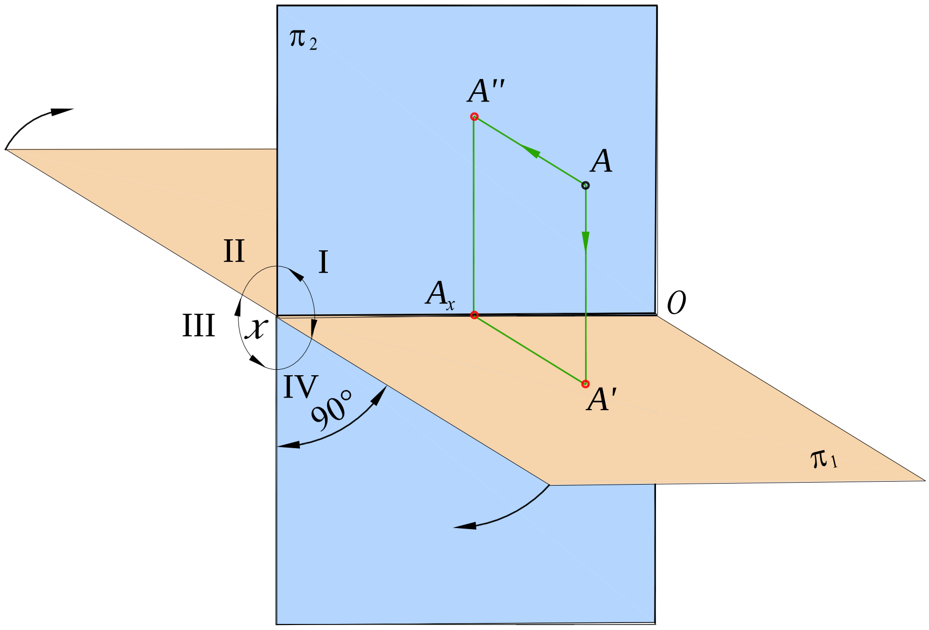


Рис. 1.9

Фронтальной проекцией точки называют прямоугольную проекцию точки на фронтальной плоскости проекций. Фронтальную проекцию находим как точку пересечения перпендикуляра, проведенного из точки A, с плоскостью π_2. Обозначим ее A''. Опустив перпендикуляр из точки A'' в плоскости π_2 на ось Ox, получим вспомогательную точку A_x.

Рассмотрим обратную задачу – построение точки A в пространстве по двум заданным ее проекциям – горизонтальной A' и фронтальной A''. Точку A находим в пересечении перпендикуляров, проведенных из проекции A' к плоскости π_1 и из проекции A'' к плоскости π_2. Эти перпендикуляры пересекутся в единственной искомой точке A пространства.

Таким образом, две прямоугольные проекции точки вполне определяют ее положение в пространстве относительно данной системы взаимно перпендикулярных плоскостей проекций – т. е. чертеж становится обратимым.

Для получения плоского чертежа точки необходимо совместить плоскость π_1 с плоскостью π_2 поворотом вокруг оси Ox на угол 90° вниз по стрелке, как это показано на рис. 1.9. При этом отрезки A_xA'' и A_xA' образуют один отрезок $A''A'$, перпендикулярный к оси Ox. Этот отрезок $A''A'$ называется *линией проекционной связи* (рис. 1.10). В результате совмещения плоскостей проекций получается чертеж, известный под названием эпюр Монжа (Epure – чертеж (франц.)). Он был назван в честь основоположника начертательной геометрии французского ученого Гаспара Монжа. Без обозначения плоскостей π_1 и π_2 этот чертеж будет выглядеть так, как это показано на рис. 1.11.

Иногда двух проекций геометрического элемента бывает недостаточно, чтобы определить его форму и истинные размеры. Тогда выполняют построение изображения на третьей плоскости. Введем в систему π_1, π_2 третью плоскость проекций, перпендикулярную плоскостям π_1 и π_2. Ее называют *профильной* плоскостью проекций и обозначают π_3 (рис. 1.12).

Три взаимно перпендикулярные плоскости проекций называются координатными плоскостями. Они пересекаются по трем взаимно перпендикулярным прямым Ox, Oy, Oz, которые называются *осями координат* и обозначаются x, y, z. Общая точка O – начало координат.

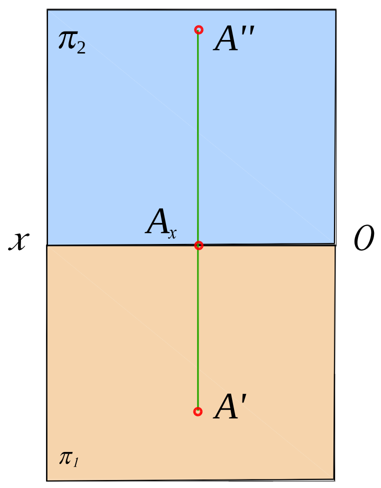


Рис. 1.10

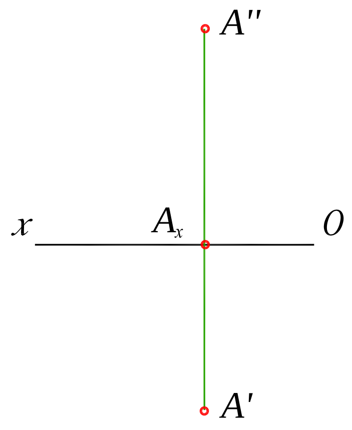


Рис. 1.11

Плоскости π₁, π₂, π₃, пересекаясь между собой, делят пространство на восемь частей, называемых октантами, как это показано на рис. 1.12. В зависимости от положения точки относительно плоскостей проекций ее координаты могут иметь положительные и отрицательные значения. Например, в первом октанте все координаты имеют положительные, а в седьмом – отрицательные значения.

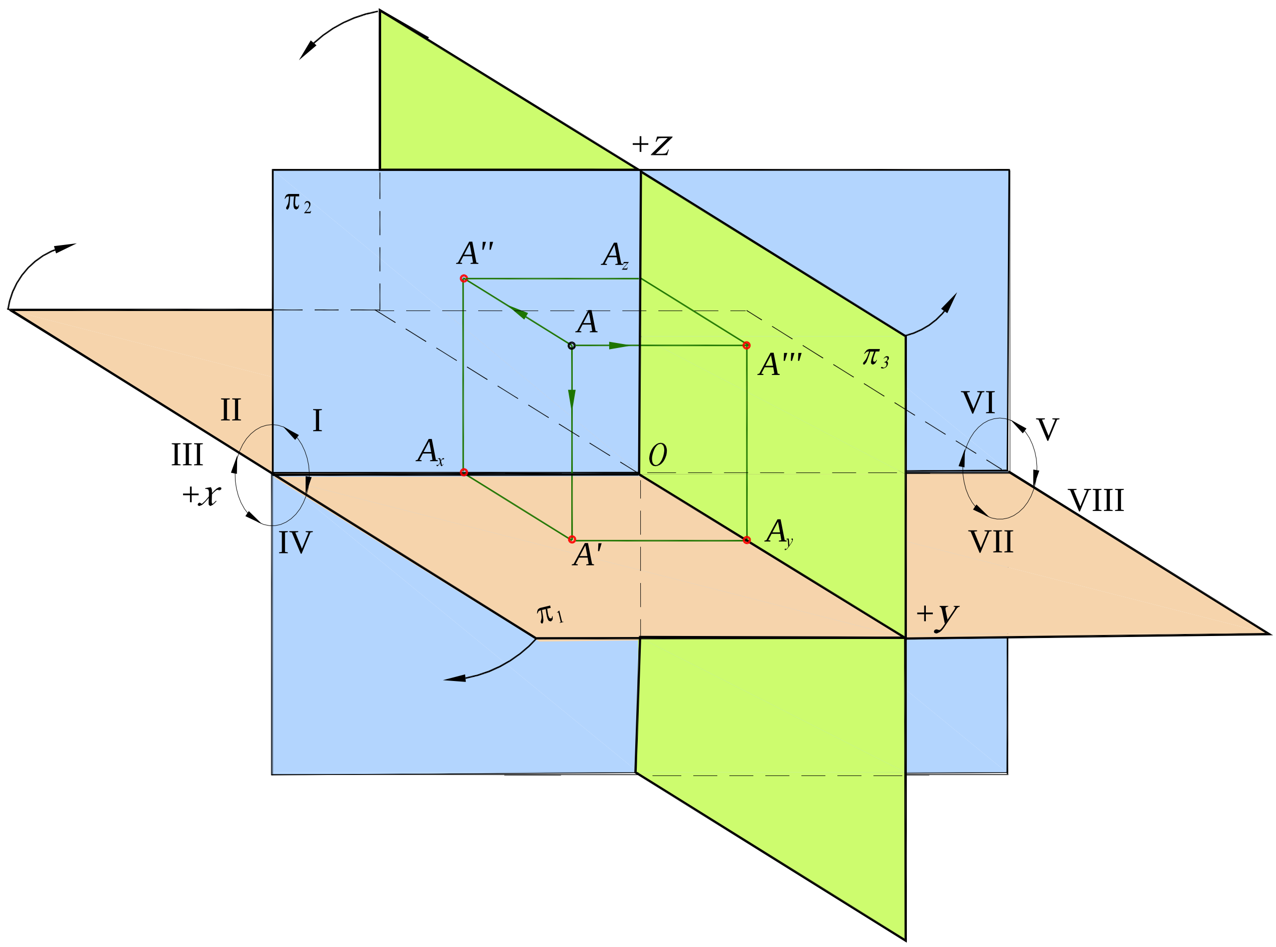


Рис. 1.12

Несмотря на то, что проецируемый объект можно расположить в любом октанте, во многих странах принято помещать изображаемый объект в первом октанте. Рассмотрим построение трех проекций некоторой точки пространства. Зададимся произвольной точкой *A* (рис. 1.12). Проецирование на плоскости π_1 и π_2 выполняется аналогично приведенному выше примеру проецирования точки *A* на две плоскости проекций. Профильной проекцией точки является прямоугольная проекция точки на профильной плоскости проекций π_3. Обозначим ее A'''.

Часто с осями проекций совмещают декартову систему координат. Из рис. 1.12 видно, что:

$AA' = A''A_x = A'''A_y$ (высота *z* точки *A* – аппликата);

$AA'' = A'A_x = A'''A_z$ (глубина *y* точки *A* – ордината);

$AA''' = A'A_y = A''A_z$ (широта *x* точки *A* – абсцисса).

Чтобы перейти к плоскому изображению, повернем плоскость π_1 вниз вокруг оси *Ox* и плоскость π_3 вправо вокруг оси *Oz* до совмещения с плоскостью π_2, как это показано стрелками на рис. 1.12.

При развороте плоскостей π_1 и π_3 ось *y* воспроизводится дважды. На рис. 1.13 показано расположение проекций A', A'', A''' точки *A* после совмещения плоскостей проекций.

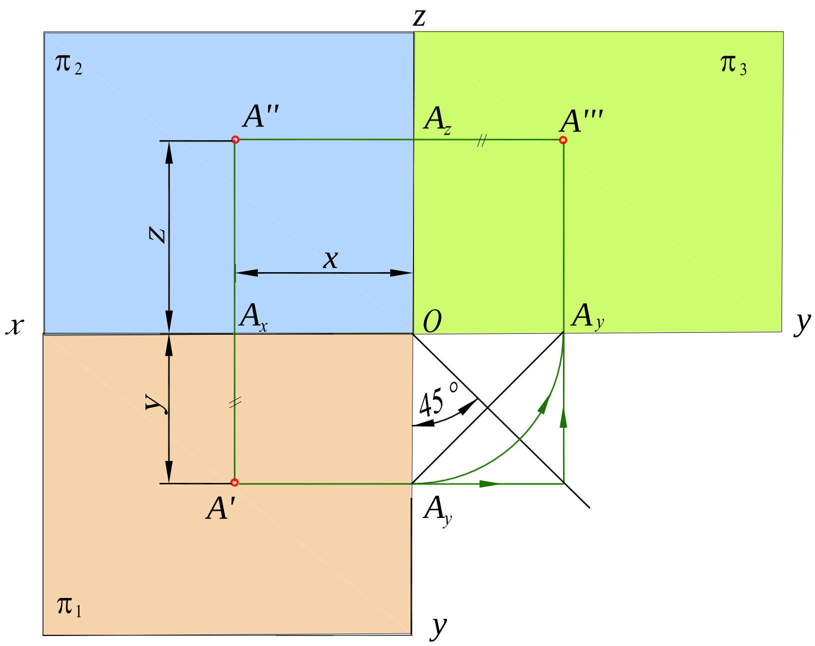


Рис. 1.13

Прямые, соединяющие на чертеже две проекции одной и той же точки, являются линиями проекционной связи, между A' и A'' – вертикальная линия связи, между A'' и A''' – горизонтальная линия связи, между проекциями A' и A''' – ломаная линия связи. Переход от оси *y* плоскости π_1 к оси *y* плоскости π_3 может осуществляться при помощи дуги или вспомогательной прямой, проведенной под углом 45° к оси *y*.

На рис. 1.14 выполнено построение профильной проекции A''' точки *A* по заданной горизонтальной A' и фронтальной A''. Построение выполняется следующим образом:

1. Проводим через проекцию A'' горизонтальную линию связи, на которой находится профильная проекция A'''.
2. Проводим ломаную линию связи через $A'A_yA_{y1}A'''$ до пересечения с горизонтальной линией связи, проведенной через фронтальную проекцию A''.

Профильную проекцию A''' можно получить, откладывая на горизонтальной линии связи от точки A_z отрезок, равный координате *y*.

Как известно, положение точки в пространстве может быть задано при помощи трех ее координат (абсциссы *x*, ординаты *y*, аппликаты *z*), т. е. трех чисел, выражающих расстояния от этой точки до трех плоскостей проекций. Запись координат точки производится в такой форме: $A(x, y, z)$.

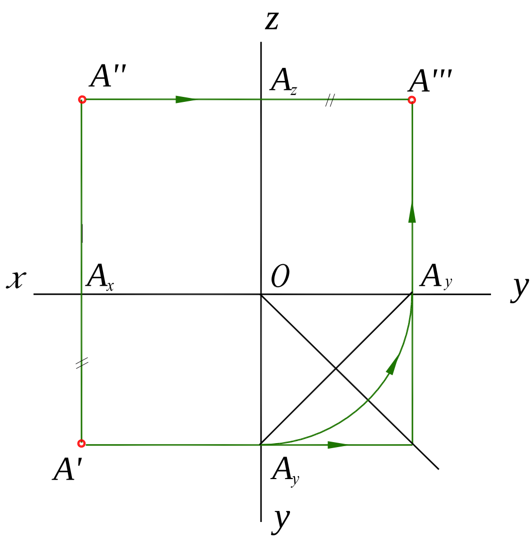


Рис. 1.14

Предположим, задана точка A(15, 20, 30). Эта запись означает, что точка A определяется координатами x = 15, y = 20, z = 30. Если масштаб для построения чертежа задан или выбран, то построение проводят так, как показано на рис. 1.13, 1.14 – откладывается на оси x от точки O отрезок OA_x = 15, а на перпендикуляре к этой оси, проведенном из точки A_x, откладывают отрезки A_xA' = 20 и A_xA'' = 30. Затем строят профильную проекцию A''', как описано выше.

В дальнейшем все геометрические элементы (точки, прямые, фигуры, тела) будем располагать в I четверти (I октанте) пространства.

1.6. Примеры решения задач

Задача 1. По заданным координатам точки A(15, 20, 30) построить ее проекции и наглядное изображение в пространстве.

Решение.

- Выбираем масштаб 1 : 1 для решения задачи.
- По оси Ox откладываем x = 15 (точка A_x рис. 1.15).
- В точке A_x восстанавливаем перпендикуляр к оси (линия связи) и, отложив на нем y = 20 и z = 30, получим соответственно точку A' – горизонтальную проекцию точки A и точку A'' – фронтальную проекцию точки A.
- Затем из точки A' проведем перпендикуляр к оси Oy (точка A_y).
- Радиусом OA_y переносим точку A_y на ось Oy_1 (точка A_{y1}).
- Из точки A_{y1} восстанавливаем перпендикуляр к оси Oy_1.
- Из точки A'' проводим горизонтальную линию связи. В пересечении линий связи получим точку A''' – профильную проекцию точки A.

Для определения положения точки в пространстве построим ее аксонометрическую проекцию. Для этого воспользуемся известной из средней школы косоугольной фронтальной диметрической проекцией. Аксонометрические оси у этой проекции расположены так, как показано на рис. 1.16.

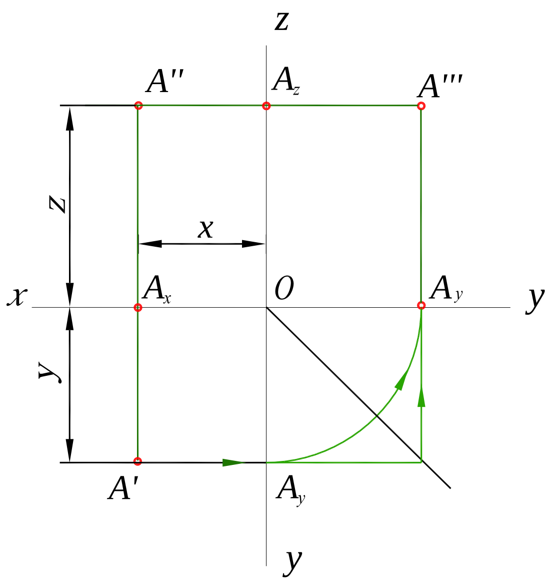


Рис. 1.15

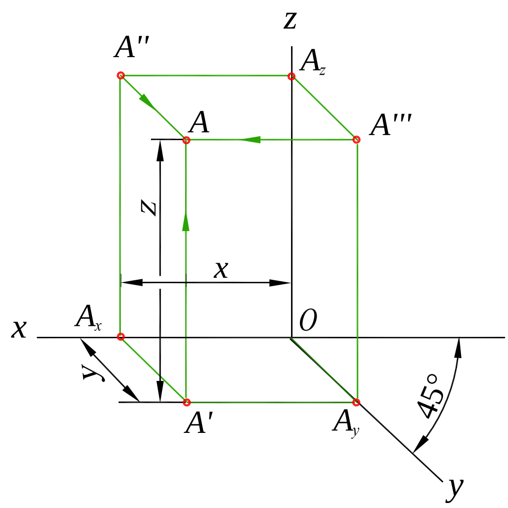


Рис. 1.16

Отметим, что коэффициент искажения по осям x и z равен 1, а по оси y равен 0,5, т. е. численные значения координаты y необходимо уменьшать в два раза.

Отложив по осям значения координат (x = 15, y = 20, z = 30), как это показано на рис. 1.16, построим горизонтальную A', фронтальную A'' и профильную A''' проекции точки A. Из полученных проекций проведем перпендикуляры к плоскостям проекций, которые пересекутся в точке A, являющейся аксонометрической проекцией исходной точки.

Задача 2. Построить недостающие проекции точек A, B, C, D (рис. 1.17). Заданные проекции этих точек на чертеже показаны черными точками.

Решение. Недостающие проекции точек строят с помощью линий связи между проекциями, направление которых указано стрелками. Выполнив необходимые построения, приведенные на чертеже, получим искомые проекции точек, отмеченные красными точками и крестиками.

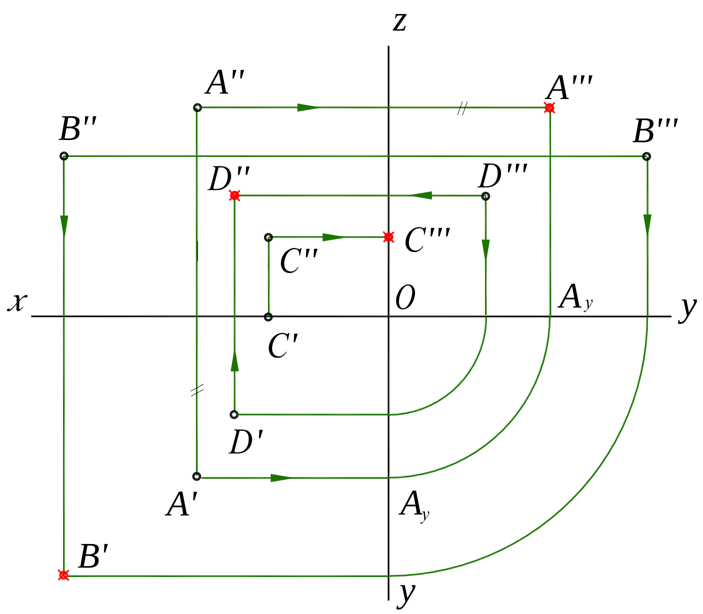


Рис. 1.17

1.7. Вопросы для контроля

1. Что называется прямоугольной проекцией точки?
2. Сформулируйте основные свойства прямоугольного проецирования.
3. Как называются и обозначаются плоскости проекций?
4. Что называется горизонтальной, фронтальной и профильной проекцией точки?
5. Какая существует зависимость во взаимном расположении проекций точки, изображенной в прямоугольной системе плоскостей проекций?
6. Как обозначаются проекции точек?
7. В какой последовательности записываются координаты точек?

Глава 2. Прямая

2.1. Проекции отрезка прямой линии

Как известно из элементарной геометрии, прямая линия определяется двумя точками, поэтому, чтобы построить проекции этой прямой, необходимо иметь проекции двух точек, принадлежащих этой прямой.

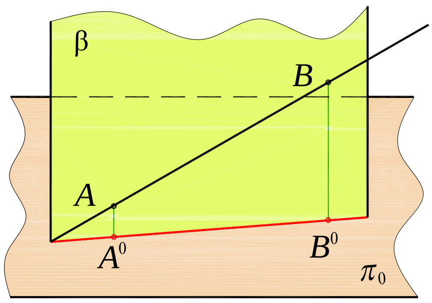


Рис. 2.1

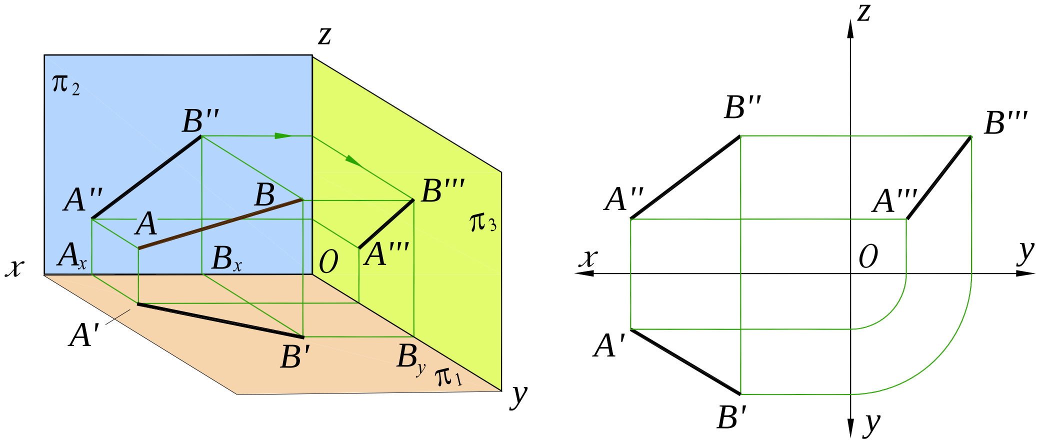
Возьмем на произвольной прямой две точки A и B (рис.2.1). Их проекции A^0 и B^0 на плоскости π_0 определяют прямую, которую можно рассматривать как линию пересечения плоскости π_0 с плоскостью β, определяемой прямой AB и проецирующими лучами AA^0 и BB^0. Линия пересечения плоскостей π_0 и β проходит через проекции A^0 и B^0 на плоскости π_0. Эта линия и является проекцией прямой на плоскости проекций π_0.

Одна проекция прямой не определяет ее положения в пространстве. Для однозначного определения прямой в пространстве необходимы как минимум две проекции.

2.2. Прямые общего и частного положения

Прямые в пространстве могут занимать относительно плоскостей проекций различное положение.

Прямую, не параллельную ни одной из плоскостей проекций, называют *прямой общего положения*. На рис. 2.2, *а* дано пространственное изображение, а на рис. 2.2, *б* – чертеж прямой AB. Точки A и B находятся на разных расстояниях от каждой из плоскостей проекций, т. е. прямая AB не параллельна ни одной из них. Значит, прямая AB общего положения.



а *б*

Рис. 2.2

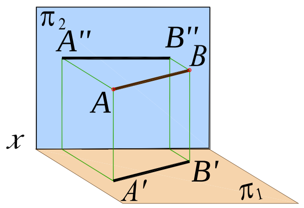
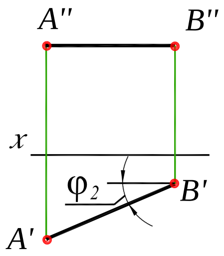
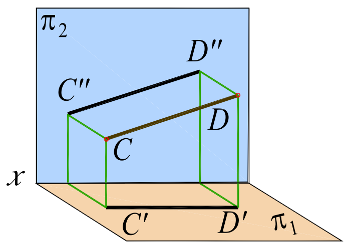
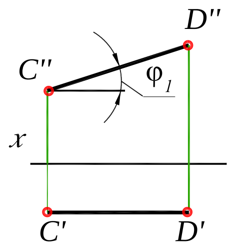
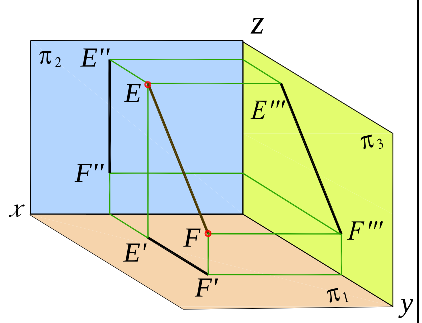
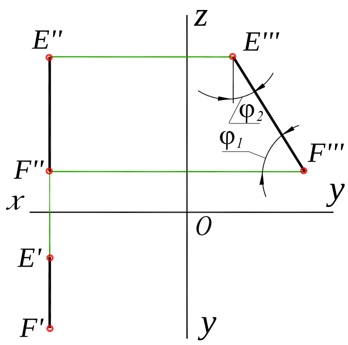
Прямые, параллельные или перпендикулярные к плоскостям проекций, называются *прямыми частного положения*. Прямая, параллельная какой-либо одной плоскости проекций, называется *прямой уровня*. Различают три линии уровня:

1) горизонтальная – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1;
2) фронтальная – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций π_2;
3) профильная – прямая, параллельная профильной плоскости проекций π_3.

Характерные особенности прямых уровня и их проекций приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Прямые уровня

Наименование и положение прямой	Наглядное изображение прямой	Чертеж прямой	Особенности проекций прямой
Горизонтальная, $AB \parallel \pi_1$			$A''B'' \parallel x$; $A'B'$ – натуральная величина; φ_2 – угол наклона прямой AB к плоскости π_2
Фронтальная, $CD \parallel \pi_2$			$C'D' \parallel x$; $C''D''$ – натуральная величина; φ_1 – угол наклона прямой CD к плоскости π_1
Профильная, $EF \parallel \pi_3$			$E'F'$ и $E''F'' \perp x$; $E'''F'''$ – натуральная величина; φ_1 и φ_2 – углы наклона прямой EF соответственно к плоскостям π_1 и π_2

Прямая, перпендикулярная к плоскостям проекций, называется *проецирующей*.

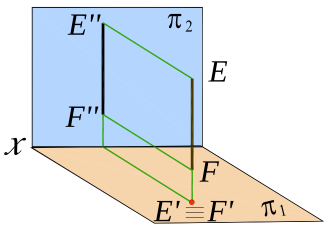
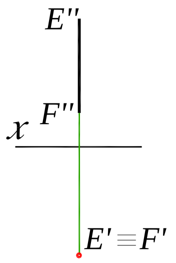
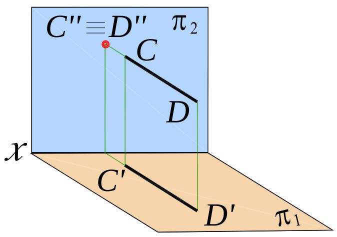
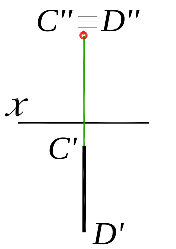
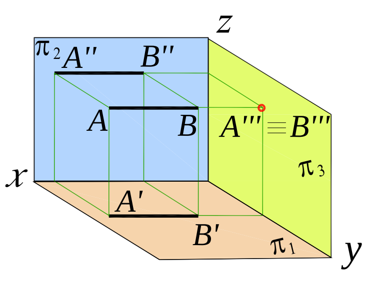
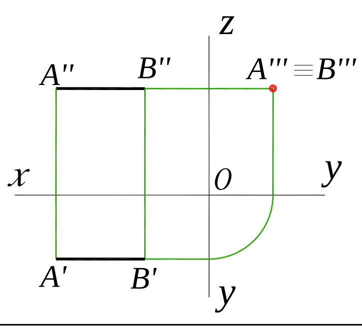
Различают три проецирующие прямые:

1) горизонтально-проецирующая – прямая, перпендикулярная к плоскости π_1;
2) фронтально-проецирующая – прямая, перпендикулярная к плоскости π_2;
3) профильно-проецирующая – прямая, перпендикулярная к плоскости π_3.

Характерные особенности проецирующих прямых и их проекции приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Проецирующие прямые

Наименование и положение прямой	Наглядное изображение прямой	Чертеж прямой	Особенности проекций прямой
Горизонтально-проецирующая			$E'F'$ – вырожденная проекция (точка); $E''F'' \perp$ оси x
Фронталь-но-проецирующая			$C''D''$ – вырожденная (точка); $C'D' \perp$ оси x
Профильно-проецирующая			$A'''B'''$ – вы- рожденная (точка); $A'B' \parallel A''B'' \parallel$ оси x

2.3. Следы прямой

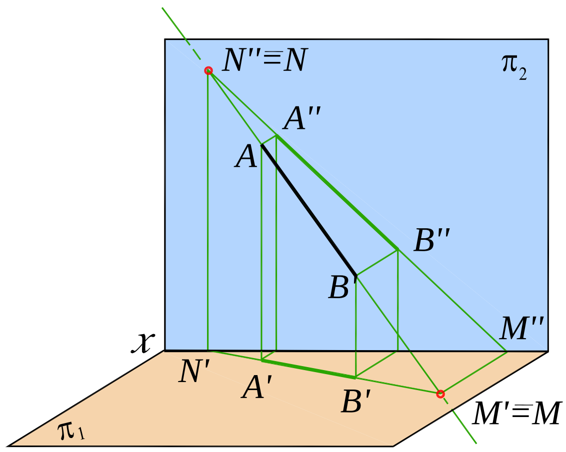


Рис. 2.3

Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называют *следами*. В системе трех плоскостей проекций прямая общего положения имеет три следа – горизонтальный, фронтальный и профильный; прямая, параллельная одной из плоскостей проекций – два следа, и прямая, перпендикулярная к плоскости проекций – один след. На рис. 2.3 изображена прямая общего положения *AB*. Она пересекается с плоскостью π_1 в точке *M*, а с плоскостью π_2 – в точке *N*. Точка *M* – горизонтальный след этой прямой, а точка *N* – ее фронтальный след. Горизонтальная проекция *M′* горизонтального следа совпадает с самим следом *M*, а фронтальная проекция *M″* этого следа лежит на оси проекций *x*. Проекции фронтального следа *N* находятся аналогично.

На рис. 2.4 показано построение следов прямой *AB* общего положения. Чтобы найти горизонтальный след, следует продлить фронтальную проекцию *A″B″* до пересечения с осью *x* (точка *M″*) и из этой точки восстановить перпендикуляр к оси *x* (провести линию связи) до пересечения с продолжением горизонтальной проекции *A′B′*.

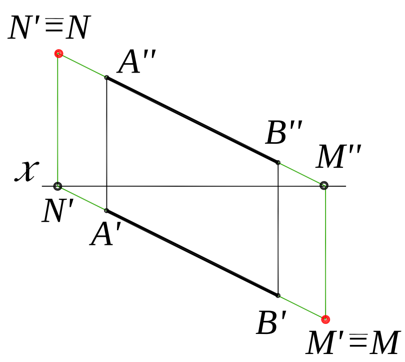


Рис. 2.4

Точка *M′* – горизонтальная проекция горизонтального следа, которая совпадает с самим следом *M*.

Для нахождения фронтального следа необходимо продолжить горизонтальную проекцию *A′B′* до пересечения с осью *x* (точка *N′*) и через точку *N′*, которая является горизонтальной проекцией фронтального следа, провести перпендикуляр к оси *x* до пересечения с продолжением фронтальной проекции *A″B″*. Точка *N″* – фронтальная проекция фронтального следа, которая совпадает с фронтальным следом *N*.

2.4. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона прямой к плоскостям проекций

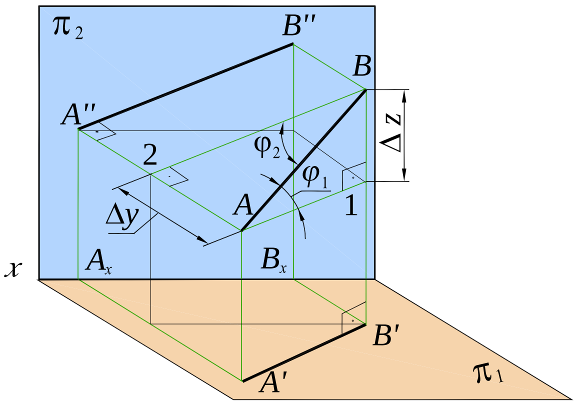


Рис. 2.5

Как отмечалось выше, отрезки прямых общего положения не проецируются в натуральную величину ни на одну из плоскостей проекций.

Длину (натуральную величину – НВ) отрезка можно определить на основании свойства ортогонального проецирования. Из рисунка 2.5 видно, что натуральная величина отрезка *AB* общего положения является гипотенузой прямоугольного треугольника *AB*1. В этом треугольнике один катет *A*1 параллелен плоскости π_1 и равен по длине горизонтальной проекции отрезка *AB* ($A1 = A'B'$), а величина второго катета равна разности расстояний точек *B* и *A* до плоскости проекций π_1, т. е. $B1 = BB' - AA' = \Delta z$.

Угол φ_1 – угол наклона прямой *AB* к горизонтальной плоскости проекций π_1.

Таким образом, на горизонтальной проекции отрезка (рис. 2.6) можно построить прямоугольный треугольник, взяв вторым катетом Δz. Гипотенуза этого треугольника $A'B^*$ будет натуральной величиной отрезка *AB*, а угол φ_1 определяет угол наклона отрезка *AB* к горизонтальной плоскости проекций π_1.

Аналогичное построение можно сделать на фронтальной плоскости проекций, взяв в качестве второго катета разность расстояний концов отрезка (Δy) до фронтальной плоскости проекций π_2. Отрезок A^*B'' – натуральная величина отрезка *AB*, угол φ_2 – угол наклона *AB* к плоскости π_2.

Из вышесказанного вытекает, что *длина* (*НВ*) *отрезка общего положения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен проекции отрезка на плоскости проекций, а другой катет равен разности расстояний концов отрезка до этой плоскости*.

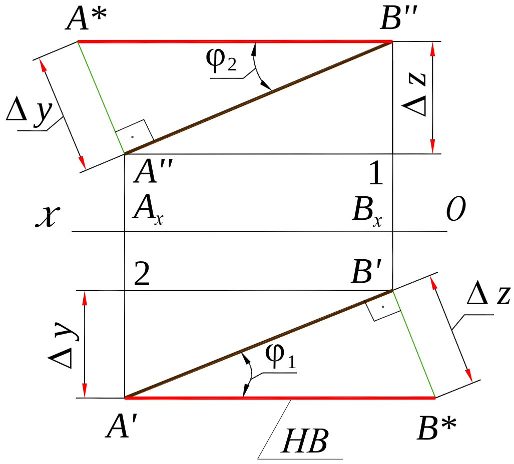


Рис. 2.6

2.5. Относительное положение точки и прямой. Деление отрезка прямой в данном отношении

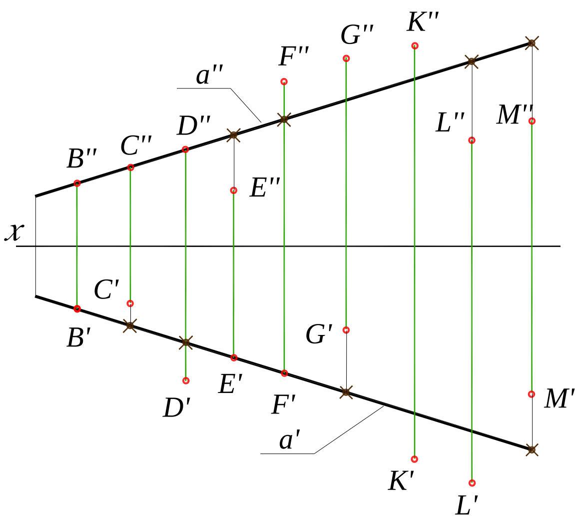


Рис. 2.7

Точка и прямая в пространстве могут занимать различное положение относительно друг друга. Если точка принадлежит прямой, то проекции этой точки лежат на одноименных проекциях данной прямой. Точка B принадлежит прямой a (рис. 2.7), так как ее проекции B' и B'' лежат на одноименных проекциях прямой a' и a''. Точки C, D, E, F, G, K, L, M не принадлежат прямой a, так как по крайней мере одна из проекций каждой из этих точек не лежит на соответствующей проекции прямой.

Определить положение точек, заданных на рис. 2.7, относительно прямой a можно сравнивая координаты z и y каждой из этих точек с соответствующей точкой (обозначенной крестиком) прямой a, лежащей на одной и той же линии связи.

Точка C находится позади прямой a; точка D – впереди прямой a, точка E – под прямой a, точка F – над прямой a; точка G – над и позади прямой a, точка K – над и впереди прямой a, точка L – под и впереди прямой a, точка M – под и позади прямой a.

Иногда требуется разделить отрезок в данном отношении.

Из свойств параллельного проецирования известно, что отношение отрезков прямой равно отношению проекций этих отрезков. Чтобы разделить отрезок прямой в заданном отношении, необходимо разделить в этом отношении одну из проекций этого отрезка, а затем с помощью линий связи перенести делящую точку на другие проекции.

На рис. 2.8 дан пример деления отрезка прямой линии AB в отношении 2 : 3. Из точки A' проведен вспомогательный отрезок прямой, на котором отложено пять одинаковых частей произвольной длины. Проведя отрезок $B'5$ и параллельно ему через точку 2 прямую, получим проекцию точки C', причем $A'C' : C'B' = 2 : 3$; затем по линии связи находим точку C''. Точка C делит отрезок AB в отношении 2 : 3.

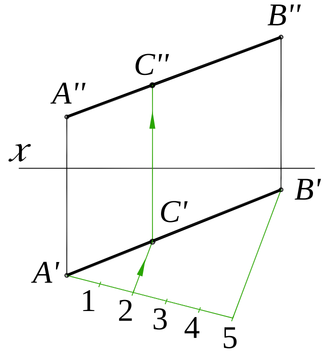


Рис. 2.8

2.6. Относительное положение двух прямых в пространстве

Прямые в пространстве могут занимать различное взаимное положение – они могут быть параллельными, пересекаться и скрещиваться. Из свойств параллельного проецирования следует, что проекции параллельных прямых параллельны между собой. Действительно, если провести через данные параллельные прямые AB и CD плоскости α и β, перпендикулярные π_0 (рис. 2.9), то эти две плоскости будут параллельны и в их пересечении с плоскостью проекций π_0 получатся две взаимно параллельные прямые A^0B^0 и C^0D^0, являющиеся ортогональными проекциями прямых AB и CD на плоскость π_0.

На рис. 2.10 приведен пример параллельных прямых AB и CD, при этом одноименные проекции этих прямых параллельны, т.е. $A'B' \parallel C'D'$, $A''B'' \parallel C''D''$, $A'''B''' \parallel C'''D'''$.

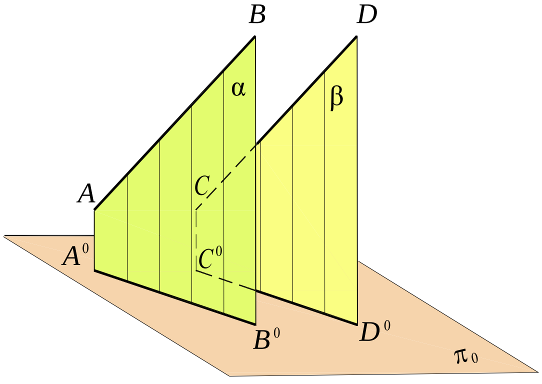


Рис. 2.9

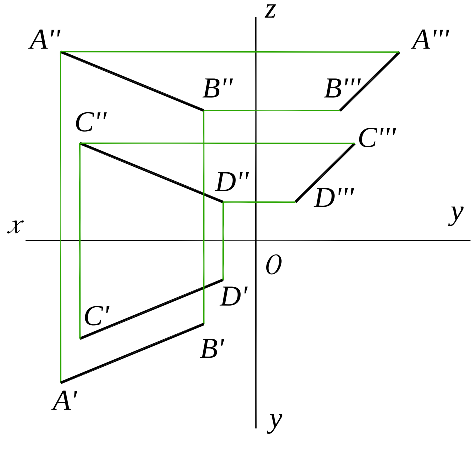


Рис. 2.10

Справедливо и обратное утверждение: если в системе плоскостей проекций π_1, π_2, π_3, проекции двух прямых параллельны, то прямые в пространстве параллельны. Это утверждение справедливо для прямых общего положения. Для прямых, параллельных одной из плоскостей проекций, оно может не подтвердиться, если заданы параллельные проекции прямых только на двух плоскостях проекций.

На рис. 2.11 профильные прямые AB и CD заданы параллельными проекциями $A'B' \parallel C'D'$, $A''B'' \parallel C''D''$, но сами прямые не параллельны, так как не параллельны их профильные проекции $A'''B'''$ и $C'''D'''$.

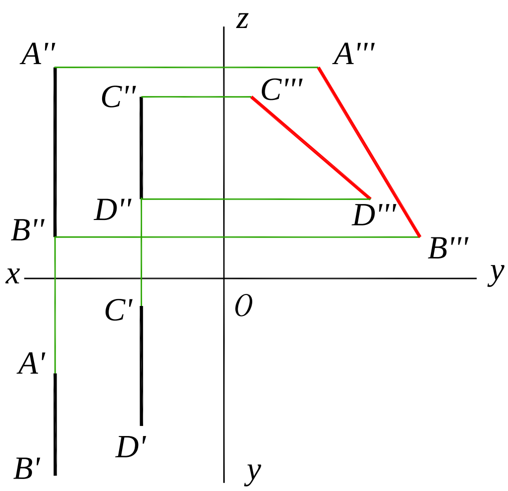


Рис. 2.11

Таким образом, для определения параллельности профильных прямых необходимо построить их проекции на профильной плоскости проекций.

Если прямые в пространстве пересекаются, то на чертеже пересекаются их одноименные проекции и точки пересечения проекций этих прямых лежат на одной линии связи.

Действительно, взаимно пересекающиеся прямые AB и CD (рис. 2.12) имеют общую точку K. Поэтому горизонтальная (K') и фронтальная (K'') проекции этой точки должны лежать на пересечении одноименных проекций данных прямых (рис. 2.12, *а*).

На рис. 2.12, *б* проекции точки K' и K'' располагаются на одном перпендикуляре к оси проекций (на одной линии связи).

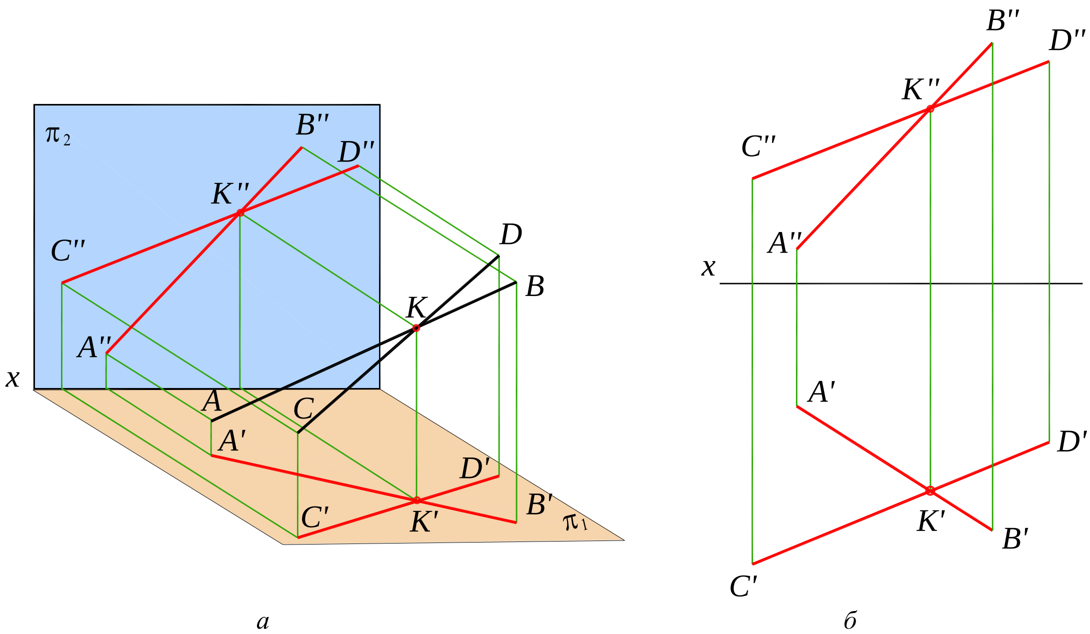


Рис. 2.12

Если две прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются скрещивающимися. Как видно из рис. 2.13, *а* и *б* горизонтальные проекции точек *A* и *C* (*A*′, *C*′) прямых *m* и *n* и фронтальные проекции точек *B* и *D* (*B*″, *D*″) сливаются в одну, так как расположены на одной проецирующей прямой. Но эти точки пересечения одноименных проекций (*A*′ ≅ *C*′ и *B*″ ≅ *D*″) не являются общими для двух прямых и, следовательно, прямые *m* и *n* скрещиваются.

Пары точек *A* и *C*, лежащие на горизонтально-проецирующей прямой, или *B* и *D*, лежащие на фронтально-проецирующей прямой, называются *конкурирующими*.

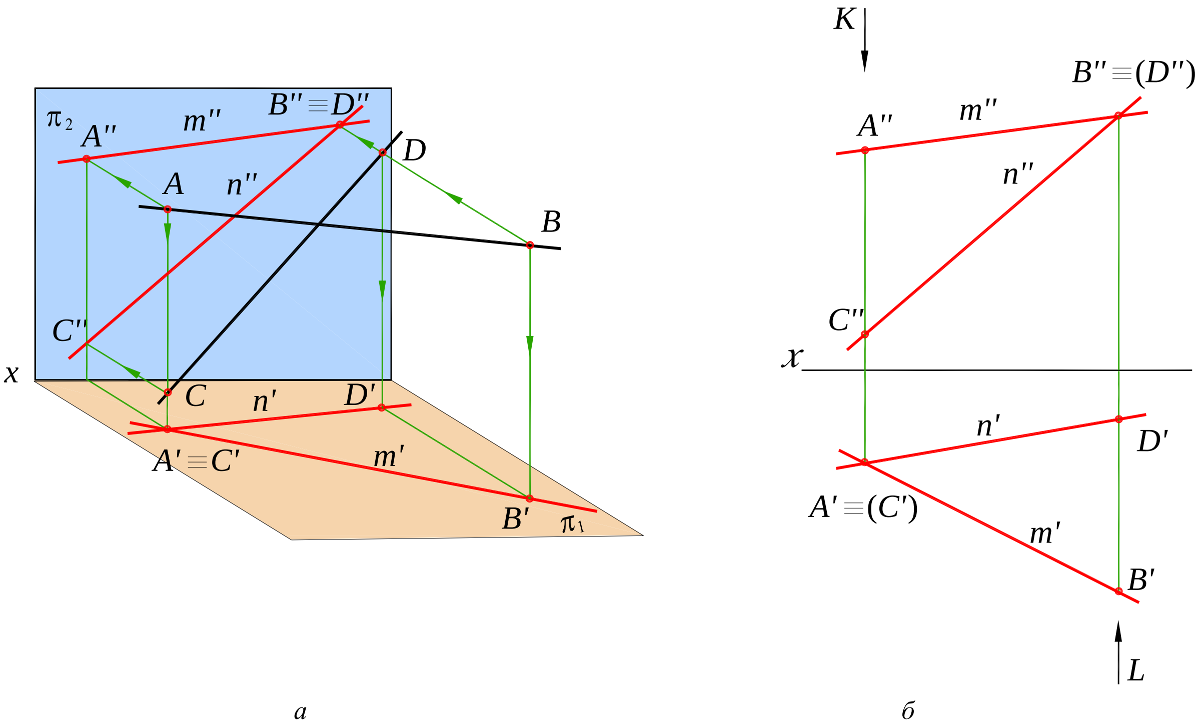


Рис. 2.13

Определим, какая из изображенных прямых (рис. 2.13, *б*) выше другой или ближе к наблюдателю. При взгляде сверху по стрелке K точка A закрывает точку C, так как ее фронтальная проекция A'' выше фронтальной проекции C'' (проекция A'' отстоит дальше от оси x). Поэтому горизонтальная проекция A' закрывает проекцию C'. При взгляде спереди по стрелке L видно, что точка B прямой m закрывает точку D прямой n. Проекция B' находится дальше от оси x, поэтому фронтальная проекция B'' закрывает проекцию D''. Обозначение проекций невидимых (закрытых) точек показано в скобках.

Такой способ определения видимости элементов чертежа называется способом *конкурирующих точек*.

2.7. Примеры решения задач

Задача 1. Через точку A (рис. 2.14) провести фронтальную прямую AB длиной 50 мм под углом 30° к плоскости π_1 и отложить на ней отрезок CD = 30 мм.

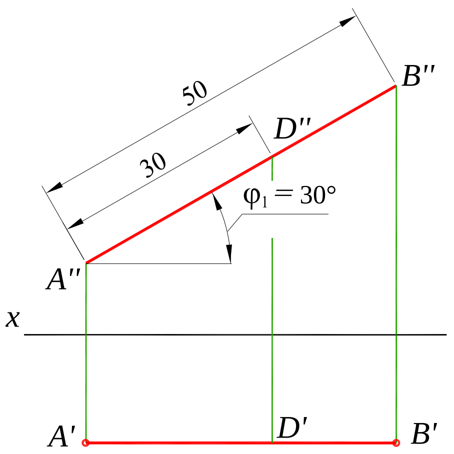


Рис. 2.14

Решение. Прямая AB параллельна фронтальной плоскости проекций π_2 и спроецируется на эту плоскость в натуральную величину, под углом 30° к оси x.

Из точки A'' проводим прямую под углом 30° к оси x (φ_1 = 30°) и откладываем на ней отрезок $A''B''$ = 50 мм.

Горизонтальная проекция AB ($A'B'$) параллельна оси x. На фронтальной проекции $A''B''$ откладываем отрезок $A''D''$ = 30 мм. По линии связи определяем горизонтальную проекцию точки D (D').

Задача может иметь несколько решений в зависимости от положения $A''B''$ по отношению к оси x.

Задача 2. Построить следы прямой, проходящей через точки A и B (рис. 2.15).

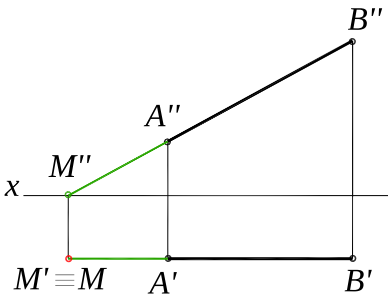


Рис. 2.15

Решение. Проводим проекции $A'B'$ и $A''B''$ прямой AB. Из построения следует, что проекция $A'B'$ параллельна оси Ox, значит $AB \parallel \pi_2$ – фронтальная прямая и фронтального следа не имеет. Для построения горизонтального следа прямой продолжим ее фронтальную проекцию до пересечения с осью x в точке M'', которая является фронтальной проекцией горизонтального следа прямой. Из точки M'' проводим перпендикуляр (линию связи) к оси x до пересечения с продолженной проекцией $A'B'$ в точке M'. Точка M' совпадает с самим горизонтальным следом прямой – точкой M.

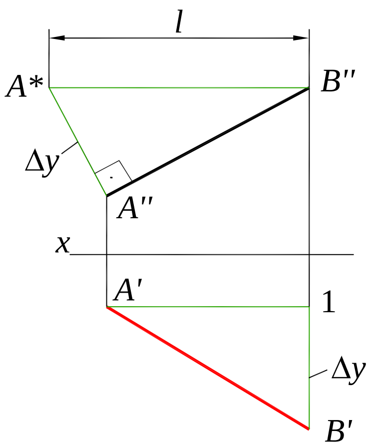


Рис. 2.16

Задача 3. Дана фронтальная проекция отрезка AB и горизонтальная проекция точки A. Построить горизонтальную проекцию отрезка AB, если натуральная величина его равна l.

Решение. По катету $A''B''$ и гипотенузе l строим прямоугольный треугольник $A''A^*B''$. В построенном треугольнике катет $A''A^*$ будет равен Δy. Через A' проводим линию $A'1 \parallel Ox$.

От точки 1 отложим Δy и получим точку B''. Соединив A' с B', получим горизонтальную проекцию отрезка AB. Задача имеет два решения.

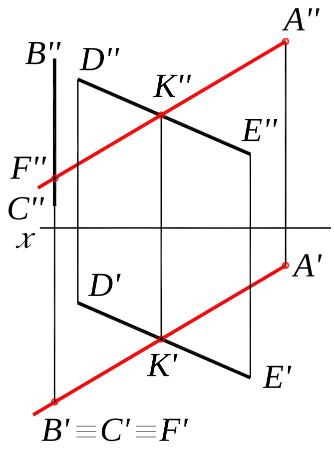


Рис. 2.17

Задача 4. Через точку *A* провести прямую, пересекающую заданные прямые *BC* и *DE* (рис. 2.17).

Решение. Прямая *BC* (*B′C′*, *B″C″*) – горизонтально-проецирующая. Горизонтальная проекция искомой прямой должна пройти через точку, являющуюся горизонтальной проекцией прямой *BC*. *F′* – горизонтальная проекция точки пересечения искомой прямой и отрезка *BC*. *K′* – горизонтальная проекция точки *K* пересечения искомой прямой и прямой *DE*. При помощи линии связи определим фронтальную проекцию *K″* точки *K*. Через *K″* проводим фронтальную проекцию искомой прямой до пересечения с проекцией *B″C″* в точке *F″*. *AF* – искомая прямая.

2.8. Вопросы для контроля

1. Какая прямая называется прямой общего положения?
2. Какие частные положения может занимать прямая относительно плоскостей проекций?
3. Какое положение занимают на чертеже проекции прямых, параллельных плоскостям проекций, проецирующих прямых?
4. Что называется следом прямой?
5. Сколько следов имеет прямая общего положения, прямая уровня, проецирующая прямая?
6. Как построить на чертеже горизонтальный и фронтальный следы прямой?
7. Как определить на чертеже взаимное положение точки и прямой?
8. Как определить натуральную величину отрезка прямой способом прямоугольного треугольника?
9. Какое взаимное положение могут занимать две прямые в пространстве?
10. Пояснить графические признаки параллельных прямых, пересекающихся прямых и скрещивающихся прямых на чертеже.